従業員の業績評価に関する統計的推測

片　岡　佑　作
朴　　　勝　俊

目　　次

要　　旨

変数 $S_j^{(i)}$ を時点 j（$\leqq n-1$）、個人 i に関する以下のようなスコアとしよう。つまり

$$S_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots \quad p_1 \\ 0 & \cdots\cdots \quad p_2 \\ -1 & \cdots\cdots \quad p_3 \end{cases}$$

$$\sum p_i = 1$$

$$0 < p_i < 1$$

こうしたとき給与の増分 $cB_n^{(i)}$，$i=1$，2（$c>0$，以下一般性を失うことなく $c=1$）は

$$B_n^{(i)} = n\delta(1,\ i) + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\ (1+r)^{-j}S_j^{(i)}$$

と書くことができる。ここで $\delta(1,\ i)$ は Kronecker デルタ、そうして r は割引率を表す。

以下この論文は $B_n^{(i)}$、$B_n^{(1)}-B_n^{(2)}(=D_n)$ のモーメント、また Lindeberg-Feller（Fisz［4］）の中心極限定理を経由して $Pr(D_n<0)$ を計算する。とくにこれらの結果から次の 1)、2)を得る。

1）任意の n について $Pr(D_n<0\,|\,r=0)$ は $Pr(D_n<0\,|\,1>r>0)$ より大きい。

2）n が $+\infty$ になるとき $\sup Pr(D_n<0\,|\,r=0) > \sup Pr(D_n<0\,|\,1>r>0)$ である。

キーワード：正規分布、中心極限定理、不利益変更、3 項選択、割引率

1　序

一定期間、例えば1年間について使用者側が従業員 B' の成果 S_j を次のように評価するとしよう。つまり時点 j について

$$
(1.1)\quad S_j = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots\ p_1 \\ 0 & \cdots\cdots\ p_2 \\ -1 & \cdots\cdots\ p_3 \end{cases}
$$

$$\sum p_i = 1, \quad 0 < p_i < 1$$

ここで、p_1 は $S_j = 1$ などに対応する確率である。そうして従業員 B' がもし $S_0 = 1$ になったのちは $j \geqslant 1$ 以降にわたって1ランク上の給与にはりつけられるとする。また $S_j = 0, -1$ はそれぞれ通常のケース、1ランク下の給与体系にしたがうものとする。そうすると n 期間を考えたとき1ランク上の給与水準について1単位の給与増額があるとして B' への上積み分（B）は

$$
(1.2)\quad B = n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)S_j
$$

となる。興味深いのは $j \geqslant 1$ で $S_j = 0$ であったとしても $B = n$ である。他方 $S_j = 0$ は中立的評価だから期首（0期）に $S_0 = 0$ となった場合 $j \geqslant 1$ で $S_j = 0$ のとき、n 期間で $B = 0$ のままである。こうした評価の方法にもとづいて給与体系が定められると従業員の期首の評価が圧倒的な意味を持つ。以上の背景をもとに朴［2］は次のような具体的問題を提起した。つまり個人、1、2について給与の上乗せ分を

$$
(1.3)\quad B^{(1)} = n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)S_j^{(1)}
$$

$$
B^{(2)} = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)S_j^{(2)}
$$

としたとき、

$$
(1.4)\quad Pr(B^{(1)} - B^{(2)} < 0)
$$

はどの程度になるか？　つまり n 期間で個人2が給与総額で個人1を逆転できる可能性をつきとめようとした。実際 $n = 29$、$p_1 = p_3 = 0.03$ を選ぶと、朴［2］のシミュレーション計算（1~2万回）

は（1.4）の確率がほぼ16～17%であることを示した（具体的な結果については［2］にある)。シミュレーションを補強する意味でこの論文の目的は次のようなものである。

1） まず B の理論的な構造をつきとめる。つまり、B のモーメント（分散、4次モーメント)、n が大きくなったときの B の分布をもとめる。また、$B^{(1)}-B^{(2)}$ のモーメント、極限分布もみちびく。そうして逆転の確率、$Pr(B^{(1)}-B^{(2)}<0)$ を近似計算によってもとめる。ついでに言っておくとこれらの理論的な解は［2］のシミュレーション結果とほぼよく似ている。また言うまでもないが、［2］は $p_1=p_3=0.03$、$p_2=1-2p_1$ としているが、理論計算ではこうした指定はなくてよい（また、労働法に関する荒木他［1］のテキストによれば $p_3\neq 0$ のケースがあれば、これは労働条件の不利益変更である。くりかえすと従業員全体に支払われる給与原資の大きさがこの評価制度導入以前のものと同一であっても、$p_3\neq 0$ でありさえすれば新制度の内容は不利益変更である)。

2） つづいて割引率を導入した場合で1）を考える。この導入は将来の価値を現時点にもどして n 期間にわたる給与の総額を見るためのものである。結論を先どりすれば $n=29$、r（割引率）を0.01とすると先に述べた逆転の可能性は当然のことながら、いく分小さくなる（$r>0$ が存在するとこれらの議論は複雑になる。以下では問題の2次モーメント、中心極限定理を経由して極限分布を計算した)。

以下、2でまず $r=0$ のケースをとり上げ、のちに $r>0$ を議論して近似的な逆転可能性をそれぞれ理論計算する。

2　展　　開

考える統計モデルを次のように書く。

$$(2.1)\quad B=n+(n-1)S_1+(n-2)S_2+\cdots+(n-(n-1))S_{n-1}$$

S_j はたがいに独立、3項選択の変数である。つまり

$$S_j=\begin{cases}1 & \cdots\cdots & p_1\\ 0 & \cdots\cdots & p_2\\ -1 & \cdots\cdots & p_3\end{cases}$$

ここで p_i について $0<p_i<1$，$p_1+p_2+p_3=1$ である。そうすると

$$E(S_j) = p_1 - p_3 = \delta$$

$$\begin{aligned} Var(S_j) &= E(S_j - \delta)^2 \\ &= (1-\delta)^2 \cdot p_1 + (-\delta)^2 \cdot p_2 + (-1-\delta)^2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

また朴［2］は $p_1 = p_3$ を考えた。このとき $\delta = 0$、このケースで $Var(S_j)$ を計算すると $Var(S_j) = p_1 + p_3 = 2p_1$ となる。B の期待値は

$$(2.2)\quad E(B) = n + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) E(S_j)$$

ここで $E(S_j) = \delta$ と書くと

$$\begin{aligned} (2.3)\quad E(B) &= n + \delta\{n-1+(n-2)+\cdots+2+1\} \\ &= n + \delta\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\ &= n \ (\delta = 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

$\delta = 0$ で $Var(B)$ は

$$\begin{aligned} Var(B) &= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) S_j)^2 \\ &= E(\textstyle\sum (n-j)^2 S_j^2 + \sum_{i \neq j} S_i S_j (n-j)(n-i)\} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2 E(S_j^2) \end{aligned}$$

$E(S_j^2)$ は

$$\begin{aligned} E(S_j^2) &= 1^2 \cdot p_1 + (-1)^2 p_3 \\ &= p_1 + p_3 \\ &= 2p_1 \ (p_1 = p_3 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

したがって

$$(2.4)\quad Var(B) = 2p_1((n-1)^2 + \cdots + 1^2)$$

$$= \frac{1}{3}p_1(n-1)n(2(n-1)+1)$$

となる。$p_1 = 0.03$、$n = 29$ で $Var(B)$ は $Var(B) = 0.01\cdot 28\cdot 29(57) = 462.84$ となってこれは［2］に一致する。B の 4 次モーメントは以下のようになる。

$$\begin{aligned}
E(B-n)^4 &= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} S_j(n-j))^4 \\
&= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} jS_{n-j})^4 \\
&= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} x_j)^4,\ \ x_j = jS_{n-j} \\
&= E\{(x_1+\cdots+x_{n-1})^2\,(x_1+\cdots+x_{n-1})^2\} \\
&= E(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+\textstyle\sum_{i\neq j} x_i x_j)\,(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+\sum_{i\neq j} x_i x_j) \\
&= E\{\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} x_j^4+3\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j^2\} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^4 E(S_{n-j}^4)+3\sum_{i\neq j} i^2 j^2 E(S_{n-j}^2\cdot S_{n-i}^2)
\end{aligned}$$

$E(S_{n-j}^4)$ などは

$$\begin{aligned}
E(S_{n-j}^4) &= 1^4\cdot p_1+0^4\cdot p_2+(-1)^4\cdot p_3 \\
&= p_1+p_3 \\
&= 2p_1 \\
E(S_{n-j}^2) &= p_1+p_3 = 2p_1
\end{aligned}$$

そうすると

$$\begin{aligned}
(2.5)\quad E(B-n)^4 &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^4(2p_1)+3\sum_{i\neq j} i^2 j^2(2p_1)^2 \\
&= (2p_1)\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^4+3\{\sum_{i,j}^{n-1} i^2 j^2-\sum_{i}^{n-1} i^4)\}\,(2p_1)^2
\end{aligned}$$

ここで森口－宇田川－一松［3，p. 2］から

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \dfrac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} i^4 = \dfrac{1}{30}(n-1)n(2(n-1)+1)\,(3(n-1)^2+3(n-1)-1)$$

$$= S_2 \cdot \frac{1}{5}\{3(n-1)^2+3(n-1)-1\}$$

$$= S_4$$

を見て B のモーメントは以下のように書くことができる。

$$(2.6)\quad E(B-n)^4 = \xi_4 S_4 + 3\xi_2^2\{S_2^2 - S_4\}$$

$$E(B-n)^2 = \xi_2 S_2$$

$$\xi_4 = E(S_j^4) = 2p_1$$

$$\xi_2 = E(S_j^2) = 2p_1$$

$$S_2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)$$

$$S_4 = S_2 \cdot \frac{1}{5}\{3(n-1)^2+3(n-1)-1\}$$

そうしてこのケースの尖度は

$$(2.7)\quad k_n = \frac{E(B-n)^4}{\{E(B-n)^2\}^2} = \frac{\xi_4 S_4 - 3\xi_2^2\{S_2^2 - S_4\}}{(\xi_2 S_2)^2}$$

$$= \frac{\xi_4 S_4 - 3\xi_2^2 S_4}{\xi_2^2 S_2^2} + 3$$

$$= \frac{S_4}{S_2^2}\left\{\frac{\xi_4}{\xi_2^2} - 3\right\} + 3$$

となっている。［2］の数値を代入すると

$$\frac{\xi_4}{(\xi_2)^2} = \frac{2p_1}{(2p_1)^2} = \frac{1}{0.06} \quad (p_1 = 0.03)$$

$$k_n = \frac{(1/5)\ \{3(n-1)^2+3(n-1)-1\}}{S_2}\left\{\frac{1}{0.06} - 3\right\} + 3$$

となる。$n=29$ で $k_{29}=\dfrac{487}{7714}\left\{\dfrac{100}{6}-3\right\}+3 \fallingdotseq 3.8628026$、他方［２］のシミュレーションによる k_{29} は 3.592～3.7559 である。このモデルで $p_1+p_2+p_3=1$、$p_1=p_3$ とすれば $2p_1+p_2=1$ だから $p_1=(1-p_2)/2$、p_1 の範囲は $0<p_1\leqq 0.5$ である。また p_1 が大きくなると k_n は小さくなる。$p_1=0.5$ で $k_n=\dfrac{S_4}{S_2^2}(-2)+3$ である。k_n の大きさについては

$$S_2=O(n^3)$$
$$S_4=O(n^5)$$
$$\frac{S_4}{S_2^2}=O(n^{-1})$$

だから $n\to+\infty$ で $k_n=3$ である（分布が正規のとき、k_n はもちろん 3 である）。

つづいて個人 1、2 に関してその差を考えよう。

$$B^{(1)}=n+\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)S_j^{(1)}$$
$$B^{(2)}=\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)S_j^{(2)}$$

ここで $B^{(1)}$ のみが $n=0$ で $+1$ の評価をうけるとする。差は

$$\begin{aligned}(2.8)\quad D&=B^{(1)}-B^{(2)}\\&=n+\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,(S_j^{(1)}-S_j^{(2)})\\&=n+\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\delta_j\end{aligned}$$

$p_1=p_3$ のケースで

$$Pr(\delta_j=2)=p_1^2$$
$$Pr(\delta_j=1)=2p_1p_2$$
$$Pr(\delta_j=0)=2p_1^2+p_2^2$$
$$Pr(\delta_j=-1)=2p_1p_2$$
$$Pr(\delta_j=-2)=p_1^2$$

δ_j はたがいに独立である。また、$2p_1+p_2=1$ である。D のモーメントは

$$
\begin{aligned}
(2.9)\quad E(D) &= n \\
E(D-n)^2 &= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\delta_j)^2 \\
&= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2\delta_j^2) \\
&= E(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^2\delta_{n-j}^2) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^2 E(\delta_{n-j}^2)
\end{aligned}
$$

となるが δ_{n-j} についてモーメントを見ると

$$
\begin{aligned}
E(\delta_{n-j}) &= 0 \\
E(\delta_{n-j}^2) &= 2(2^2p_1^2+2p_1p_2) \\
&= 2^2p_1(2p_1+p_2) = 2^2p_1 \\
E(\delta_{n-j}^4) &= 2(2^4p_1^2+2p_1p_2) \\
&= 2^2p_1(2^3p_1+p_2) \\
&= 2^2p_1(1+6p_1)
\end{aligned}
$$

だから（2.9）は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
(2.10)\quad E(D-n)^2 &= 2^2p_1S_2 = 2E(B-n)^2 \\
E(D-n)^4 &= 2^2p_1(1+6p_1)S_4+3\{S_2^2-3S_4\}(2^2p_1)^2 \\
&= \xi_4'S_4+3\{S_2-3S_4\}(\xi_2')^2
\end{aligned}
$$

ただし $\xi_4'=2^2p_1(1+6p_1)$，$\xi_2'=2^2p_1$，あきらかに D の分散は B の分散の 2 倍である（p_1 に無関係)。また D の尖度は

$$
(2.11)\quad k_n' = \frac{S_4}{S_2^2}\left\{\frac{\xi_4'}{(\xi_2')^2}-3\right\}+3
$$

ここで $\dfrac{\xi_4'}{(\xi_2')^2}=\dfrac{4p_1(1+6p_1)}{4^2p_1^2}=\dfrac{1+6p_1}{4p_1}$ となっている。B，D 間で尖度 k_n，k_n' を比較すると、p_1 のままで書いて

$$\frac{(k_n'-3)}{(k_n-3)}=\left\{\frac{1+6p_1}{4p_1}-3\right\}\left\{\frac{1}{2p_1}-3\right\}^{-1}$$
$$=\left\{\frac{1-6p_1}{4p_1}\right\}\left\{\frac{1-6p_1}{2p_1}\right\}^{-1}$$
$$=0.5$$

になる。これは n、p_1 に依存しない。また、D の分布の方がフラットであることを示す。

つづいて $B^{(1)}-B^{(2)}=D$ の極限分布を考えよう。$D=n+\sum_{j=1}^{n-1}j\delta_{n-j}$ と書いて $E(D)=n$, $V(D)=\frac{2}{3}p_1(n-1)n(2(n-1)+1)$。ここで、$\delta_{n-j}$ は5項選択の変数である。つまり

$$\delta_{n-j}=\begin{cases} 2 & \cdots\cdots \quad p_1^2 \\ 1 & \cdots\cdots \quad 2p_1p_2 \\ 0 & \cdots\cdots \quad 2p_1^2+p_2^2 \\ -1 & \cdots\cdots \quad 2p_1p_2 \\ -2 & \cdots\cdots \quad p_1^2 \end{cases}$$

また、$0<p_1\leqslant 0.5$、$2p_1+p_2=1$、$p_1=0.5$ のとき $p_2=0$ である。給与総額の逆転は $D<0$ と表現することができるのでその確率を計算すると

$$(2.12)\quad Pr(D<0)=Pr((D-n)V(D)^{-1/2}<-nV(D)^{-1/2})$$

$V(D)$ は D の分散を意味する。(2.12) は近似的に

$$Pr(D<0)\fallingdotseq Pr\left(z\geqslant n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)p_1(n-1)n(2(n-1)+1)\right\}^{-1/2}\right)$$

であり、この z は平均0、分散1の正規分布にしたがう。$p_1=0.03$ で

$$(2.13)\quad Pr(D<0)\fallingdotseq Pr(z\geqslant n\{0.02(n-1)n(2(n-1)+1)\}^{-1/2})$$

となる。さらに $n=29$ のとき不等式の R.H.S. は

$$
\begin{aligned}
&n\{0.02(n-1)n(2(n-1)+1)\}^{-1/2}\\
&\quad = 29\{0.02\cdot 28\cdot 29\cdot 57\}^{-1/2}\\
&\quad = 29\{925.68\}^{-1/2}\\
&\quad = 0.9531638\\
&\quad = O(n^{-1/2})
\end{aligned}
$$

である。ここで n が大きくなれば（評価の回数がふえる）、(2.13) は $Pr(z \geqq 0) = 0.5$ に近づく。また、$p_1(\leqq 0.5)$ が大きくなれば $Pr(z \geqq n\{\quad\}^{-1/2})$ は大きくなる。つまり逆転の可能性は大きくなる。以上の $p_1 = 0.03$, $n = 29$ で (2.13) は $Pr(z > 0.9531) \fallingdotseq Pr(z > 0.95) \fallingdotseq 0.17106$ となっている。他方［2］のシミュレーション（10000回）によると、問題の数値は0.15～0.16程度である。

ここで (2.13) が正当化できることを簡単に示そう。これは Fisz［4, pp. 206-207］あるいは Rao［5］の中心極限定理による。

$$D = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\delta_j$$

において $(n-j)\delta_j$ はたがいに独立、$E((n-j)\delta_j) = 0$, $\sigma_j^2 = Var((n-j)\delta_j) = (n-j)^2E(\delta_j^2) < +\infty$ である。そうして σ_j^2 の和を見ると

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_j^2 &= 4p_1\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2\\
&= 4p_1\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}j^2\\
&= 4p_1\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)
\end{aligned}
$$

から

$$(2.14)\quad \lim\textstyle\sum\sigma_j^2 = +\infty$$

である。また、ある正数 a について

$$(2.15)\quad Pr(|\delta_j| \leqq a) = 1$$

だから (2.14)、(2.15) は Fisz［4, pp. 206-207］の Theorem 6.9.3. の必要十分条件をみたす。ゆ

えにここでの中心極限定理の適用が許されることがわかる。

　つづいて先において割引率が入る場合を見る。現時点で将来のとり分を評価すると

$$(2.16)\quad B = n + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j S_j$$
$$g = (1+r)^{-1},\quad 0 < r < 1,\quad 0 < g < 1$$

となる。S_j の構造は先と同一である。B のモーメントは

$$\begin{aligned}(2.17)\quad E(B) &= n \\ E(B-n)^2 &= E\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j S_j\right)^2 \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j} E(S_j^2) \\ &= 2p_1 \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(j^2-2nj+n^2)g^{2j} \\ &= 2p_1\{\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^2 g^{2j} - 2n\sum jg^{2j} + n^2 \sum g^{2j}\} \\ &= 2p_1 G(n,\ g)\end{aligned}$$

となる。{　} を $G(n,\ g)$ と書いた。(2.17) の closed form を見つけるには以下が必要である。森口－宇田川－一松［3，p. 15］から $1 > x > 0$ で

$$S_2(x) = \textstyle\sum_{r=1}^{n} r^2 x^r = \dfrac{x(1+x)(1-x^n)}{(1-x)^3} - \dfrac{2nx^{n+1}}{(1-x)^2} - \dfrac{n^2 x^{n+1}}{1-x}$$

を知って

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^2 g^{2j} = \dfrac{g^2(1+g^2)(1-g^{2(n-1)})}{(1-g^2)^3} - \dfrac{2(n-1)g^{2n}}{(1-g^2)^2} - \dfrac{(n-1)^2 g^{2n}}{1-g^2}$$

また $\sum_{j=1}^{n-1} g^{2j} = \dfrac{g^2-g^{2n}}{1-g^2}$，さらに1次の部分は

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} 2jg^{2j-1} = (2g-2ng^{2n-1})(1-g^2)^{-1} + 2g(1-g^2)^{-2} g^2 (1-g^{2(n-1)})$$
$$\textstyle\sum 2jg^{2j} = 2(g^2-ng^{2n})(1-g^2)^{-1} + 2g^4(1-g^2)^{-2}(1-g^{2(n-1)})$$

そうすると（2.17）の最後の部分は

$$(2.18)\quad \sum_{j=1}^{n-1}(j^2g^{2j}-2njg^{2j}+n^2g^{2j})$$
$$=g^2(1+g^2)(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-3}-2(n-1)g^{2n}(1-g^2)^{-2}$$
$$+(-(n-1)^2g^{2n}+n^2(g^2-g^{2n}))(1-g^2)^{-1}-n\cdot 2(g^2-ng^{2n})(1-g^2)^{-1}$$
$$-n\cdot 2g^4(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-2}$$
$$=g^2(1+g^2)(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-3}-2\{(n-1)g^{2n}+ng^4(1-g^{2(n-1)})\}(1-g^2)^{-2}$$
$$+\{(-n^2+2n-1)g^{2n}+n^2g^2-n^2g^{2n}-2ng^2+2n^2g^{2n}\}(1-g^2)^{-1}$$
$$=a_1+a_2+a_3$$

となる。ここで

$$a_1=g^2(1+g^2)(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-3}$$
$$=O(1)$$
$$a_2=O(n)$$
$$a_3=((2n-1)g^{2n}-2ng^2+n^2g^2)(1-g^2)^{-1}$$
$$=g^2((2n-1)g^{2(n-1)}+n(n-2))(1-g^2)^{-1}$$
$$=O(n^2)$$
$$a_2=-2g^2\{(n-1)g^{2(n-1)}+ng^2(1-g^{2(n-1)})\}(1-g^2)^{-2}$$
$$=-2g^2\{(n(1-g^2)-1)g^{2(n-1)}+ng^2\}(1-g^2)^{-2}$$

である。さらに（2.17)、(2.18）を再度、次のように書く。

$$(2.19)\quad E(B-n)^2=2p_1G(n,\ g)$$
$$=2p_1(a_1+a_2'+a_3')$$
$$=O(n^2)$$
$$a_1=a_1(n,\ g)=O(1)$$
$$a_2'=a_2'(n,\ g)=-2g^2(-g^{2(n-1)}+ng^2\}(1-g^2)^{-2}=O(n)$$
$$a_3'=g^2(n(n-2)-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-1}=O(n^2)$$

したがって $G(n,\ g)$ は n^2 のオーダーになる。他方割引率を導入しないケースでは $E(B-n)^2$ は

$$E(B-n)^2 = 2p_1 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) = O(n^3)$$

となっている。つまり $g<1$ で B の変動幅ははるかに小さくなる。n のオーダーが 1 ケタ異なる。さらに $n \geqq 2$ で（2.19）は

$$\text{(2.20)}\quad \begin{aligned} E(B-n)^2 &= 2p_1 g^2 G(n,\ g) \\ &= 2p_1 g^2 \{b_1(n,\ g)+b_2(n,\ g)+b_3(n,\ g)\} \end{aligned}$$

$$g = \frac{1}{1+r},\quad 0<r<1$$

となる。n、g をあたえると $G(n,\ g)$ を計算することができる。$G(n,\ g)$ の構造は単純である。$b_i(n,\ g)$ は

$$\text{(2.21)}\quad \begin{aligned} b_1(n,\ g) &= (1+g^2)(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-3} \\ &= \frac{1+g^2}{1-g^2}(1-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-2} \\ &= O(1) \\ b_2(n,\ g) &= -2(ng^2-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-2} \\ &= O(n) \\ b_3(n,\ g) &= (n(n-2)-g^{2(n-1)})(1-g^2)^{-1} \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

通常 $g^{2(n-1)}$ は小さいので $b_1>0$、$b_2<0$、$b_3>0$ であるが $n=2$ で b_3 は $b_3<0$ となる。ここで

$$b_1+b_2 = \left\{\frac{1+g^2}{1-g^2}(1-g^{2(n-1)})-2(ng^2-g^{2(n-1)})\right\}(1-g^2)^{-2}$$

としておくと計算には便利である。以下、r が入らない場合との比較をしておく。$r=0$ で

$$E(B-n)^2 = 2p_1,\quad n=2$$

$$E(B-n)^2 = 10p_1,\quad n=3$$

他方、$r > 0$、$n = 2$ で b_i は

$$b_1 = (1+g^2)(1-g^2)^{-2}$$
$$b_2 = -2g^2(1-g^2)^{-2}$$
$$b_3 = -g^2(1-g^2)^{-1}$$

b_i の和は

$$\sum_{i=1}^{3} b_i = \frac{(1-g^2)-g^2(1-g^2)}{(1-g^2)^2} = 1$$

ゆえに $0 < g < 1$ で $E(B-n)^2$ は

$$\begin{aligned} E(B-n)^2 &= 2p_1 \cdot g^2 \\ &< 2p_1 \\ &= E((B-n)^2 \mid g = 1) \end{aligned}$$

となる。$r > 0$、$n = 3$ のとき（2.20）の b_i は

$$b_1 = (1+g^2)(1-g^4)(1-g^2)^{-3}$$
$$b_2 = -2(3g^2-g^4)(1-g^2)^{-2}$$
$$b_3 = (3-g^4)(1-g^2)^{-1}$$

から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} b_i &= \frac{(1+g^2)^2-2g^2(3-g^2)}{(1-g^2)^2}+\frac{3-g^4}{1-g^2} \\ &= \frac{3g^4-4g^2+1}{(1-g^2)^2}+\frac{3-g^4}{1-g^2} \\ &= \frac{(1-g^2)(1-3g^2)}{(1-g^2)^2}+\frac{3-g^4}{1-g^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-3g^2+3-g^4}{(1-g^2)}$$

$$= 4+g^2$$

となる。こうして $E((B-n)^2 \mid n=3,\ r>0)$ は

$$E(B-n)^2 = 2p_1g^2 \textstyle\sum_{i=1}^{3} p_i$$
$$= 2p_1g^2(4+g^2)$$
$$= 2p_1(4.8821642)$$
$$< 10p_1$$
$$= E((B-n)^2 \mid g=1)$$

である（とくに $r=0.01$ のとき、$4+g^2=0.88216$。r の実際の大きさについては参考文献の資料（日経新聞）を見るとよい）。つづいて $r=0$、$n=29$ で $E(B-n)^2$ は

$$E((B-n)^2 \mid g=1) = 2p_1 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1) = 2p_1(7714)$$

他方、$r=0.01$、$n=29$ とすると、$g^{56}=0.5728001$ から

$$b_1+b_2 = \{100.50223(1-0.5728001)-2(29\cdot 0.980296-0.5728001)\}\cdot(2575.6757)$$
$$= -32909.47332$$
$$b_3 = (29\cdot 27-g^{56})\ (1-g^2)^{-1}$$
$$= (29\cdot 27-0.5728001)(50.751116)$$
$$\fallingdotseq 39709.05358$$
$$g^2 \textstyle\sum b_i = 6666.02153$$

したがって、このケースで $E((B-n)^2 \mid n=29)$ は

$$E(B-n)^2 = 2p_1g^2(b_1+b_2+b_3) = 2p_1(6666.02153)$$

である。そうすると、$r=0,\ 0.01$ で分散比は

$$\frac{E((B-n)^2 \mid n=29,\ r=0.01)}{E((B-n)^2 \mid n=29,\ r=0)} \fallingdotseq 0.864$$

となっている。

つづいて個人（1)、(2）について給与の差を考える。$B^{(i)}$ は

$$(2.22)\quad B^{(1)} = n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(1)}$$

$$B^{(2)} = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j S_j^{(2)}$$

$$g = (1+r)^{-1},\quad 0 < r < 1$$

ここで g は $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ 間で共通である。そうすると差は

$$(2.23)\quad D = B^{(1)} - B^{(2)}$$

$$= n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j \delta_j$$

$\delta_j = S_j^{(1)} - S_j^{(2)}$、$D$ のモーメントは

$$E(D) = n$$

$$E(D-n)^2 = E(\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^j\delta_j)^2$$

$$= E(\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j}\delta_j^2)$$

$$= 4p_1\{\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j}\}$$

$$= 4p_1 g^2 G(n,\ g)$$

以上は $4p_1$ を除いて B と同一の形をあたえる。n が大きいとき、D を正規分布で近似することができるかを見ると $\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)g^2\delta_j$ のかたちで $(n-j)g^j\delta_j$ の分散は $\sigma_j^2 = (n-j)^2 g^{2j}E(\delta_j^2) = (n-j)^2 g^{2j}(4p_1)$ であり、その和は先の議論から

$$(2.24)\quad \sum_{j=1}^{n-1}\sigma_j^2 = 4p_1\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^2 g^{2j}$$

$$= 4p_1\{g^2\cdot(b_1+b_2+b_3)\}$$

となっている。b_i の定義は（2.21）にある。(2.24）で

$$b_1 = O(1)$$
$$b_2 = O(n), \quad b_2 < 0$$
$$b_3 = O(n^2), \quad b_3 > 0$$

だから $\lim \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2 = +\infty$、こうして、$r > 0$ においても D を標準正規変数で近似可能である。逆転可能の確率は $p_1 = 0.03$, $r = 0.01$, $g = (1+r)^{-1}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
(2.25)\quad & Pr(D < 0) \\
&= Pr((D-n)V^{-1/2} < -nV^{-1/2}) \\
&\fallingdotseq Pr(z < -n(4p_1 g^2 G(n,\ g))^{-1/2}) \\
&= Pr(z \geqq n(0.12g^2 G(n,\ g))^{-1/2})
\end{aligned}
$$

ここで V は D の分散を意味する。$n = 29$ のとき（2.25）の R.H.S. は

$$
\begin{aligned}
& n(0.12g^2 \cdot G(n,\ g))^{-1/2} \\
&= 29(0.12g^2 \cdot G(29,\ g))^{-1/2} \\
&= 29(0.12 \cdot 6666.02153)^{-1/2} \\
&= 29 \cdot (28.282902)^{-1} \\
&\fallingdotseq 1.0253
\end{aligned}
$$

こうして $r = 0.01$ で

$$
\begin{aligned}
& Pr(D < 0 \mid r = 0.01) \\
&= Pr(z \geqq 1.0253) \\
&\fallingdotseq 0.152 \\
&< 0.171 \\
&\fallingdotseq Pr(D < 0 \mid r = 0)
\end{aligned}
$$

から逆転可能な確率は10%以上小さくなる。追加的に $Pr(D<0)$ の特性を考えると $Pr(D < 0) = Pr(z \geqq n(4p_1 g^2 G(n,\ g))^{-1/2})$ だから p_1、g が大きくなれば、逆転可能な確率は大きくなる。さらに n が大きい場合の G を考えると（2.25）で $G(n,\ g) \fallingdotseq (1-g^2)^{-1} n^2$、ゆえに（2.25）の R.H.S. は n に無関係となり

(2.26)　$n(4p_1g^2(1-g^2)^{-1}n^2)^{-1/2}$

$$=(4p_1g^2(1-g^2)^{-1})^{-1/2}$$

ここで $p_1=0.03$，$r=0.01$ を代入すると（2.26）は $(4\cdot0.03\cdot0.980296\cdot(50.751116))^{-1/2}=(2.4433855)^{-1}=0.4092682$、そうすると（2.25）の $Pr(D<0)$ は

$$Pr(z\geqslant0.409)=0.3409$$

となる。こうして n が無限大であっても逆転可能な確率の上限は 0.3409 にとどまる。($n=+\infty$ で割引率を考慮しないとき、逆転可能確率は p_1 に関係なく 0.5 である)。

3　結　　論

以下簡単に統計理論の立場から結論を述べる。

1）給与総額の逆転確率は（2.13)、(2.25）から $p_1(=Pr(S_i=1))$、n（評価の回数)、r（将来の給与額に関する割引率）に依存する。言うまでもないが $p_1\uparrow$，$n\uparrow$，$r\downarrow$ で逆転の確率は高まる。

2）$p_1=0.03$ で計算結果をあたえたが、以上の議論では $p_1=Pr(S_i=1)=Pr(S_i=-1)$ のように S_i の分布を左右対称にしているので p_1 をいたずらに大きくすることは給与制度の設計上無理であろう（p_1 を大きくすると不利益変更を受ける該当者数も多くなる)。

3）評価の回数（n）を例えば年 2 回とすれば、初期に劣位に立った従業員が挽回できる機会は当然ふえる。しかしこれも評価する側の作業をはん雑にさせることになる。

4）割引率 $r(0<r<1,\ g=(1+r)^{-1})$ を導入するケースでは逆転確率は当然小さくなる。先の議論は $r=0.01$ を選んだが、r のとり方についてはもちろん多くの考え方がある。ただし、$r>0$ と $r=0$ では D_n（給与差）に関する統計的性質がかなり異なる点がわかった。n を大きくとるとき、このちがいがはっきりと出るであろう。

5）残された問題としては、r（割引率）は個人間で同一か。個人 1、2 がともに +1 の評価を受けたとしても対応する時点が異なると $D_n\neq0$ である。さらに +1 の評価の効果が n の手前で切断された場合も D_n に新たな変化がおきる、などがあげられる。

しかしながら以上の一部分についてはわれわれはすでに結果を得た。

注

1）この論文の一部分は朴［2］の学部内研究報告（2009 年 6 月 10 日）にもとづいている。出席者の 1 人の斉藤卓爾准教授からは割引率の導入など、多岐にわたりお教えいただいた。また、初稿の段階でレフェ

リーのお2人からも数点の有益なコメントを受けた。ここに厚くお礼申し上げる。

2）レフェリーの1人は割引率（r）について、個人間で異なるものを考えるべきである、また時間それ自体の割引の導入を提案した。しかしながらこのケースで時間概念に関する個人の実験データがあるわけではない、あるいは議論した離散モデルを連続的なものへ変換するにはさらに工夫が必要であり、困難を伴うので、以上2点の採用を見送った。

参考文献

［1］荒木尚志－菅野和夫－山川隆一『詳説労働契約法』弘文堂、2008年。

［2］朴勝俊「単年度業績評価を基本給に反映させてはならない統計学的理由」Discussion Paper Series No. 2009-04、京都産業大学大学院経済学研究科、2009年6月。

［3］森口繁一－宇田川銈久－一松信『数学公式Ⅱ、－級数・フーリエ解析－』岩波書店、1972年。

［4］Fisz, M., *Probability Theory and Mathematical Statistics,* 3rd Edition, Wiley, New York, 1963.

［5］Rao. C.R., *Linear Statistical Inference and Its Applications,* Wiley, New York, 1965.

資料

日本経済新聞、2009年8月21日、朝刊、p. 1。

Some Statistical Inference on Evaluation of Employees' Performance

Yusaku KATAOKA
Seung-Joon PARK

Abstract

Let $S(i, j)$ be scores of an individual i associated with time $j \leqq n-1$ such that

$$S(i,j) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots & p(1) \\ 0 & \cdots\cdots & p(2) \\ -1 & \cdots\cdots & p(3) \end{cases}$$

with $p(1)+p(2)+p(3) = 1$ and $0 < p(i) < 1$. Then increments $B(i, n)$ of the salary of the individual i are written by

$$B(i,n) = n\delta(1,i) + (n-1)\ (1/(1+r))S(n-1) + \cdots + (n-(n-1))\ (1/(1+r))^{n-1}S(1)$$

for $i = 1, 2$ where $\delta(1, i)$ is Kronecker delta and r is rate of discount. We shall now present the exact moments of $(B(1,n)-B(2,n)) = D(n)$ by direct computation as well as $Pr(D(n) < 0)$ via the central limit theorem of Lindeberg-Feller (see Fisz [4]). In particular it follows from these results that (1) $Pr(D(n) < 0 \mid r = 0)$ is larger than $Pr(D(n) < 0 \mid r > 0)$ for any interval n. (2) As $n \to \infty$, sup $Pr(D(n) < 0 \mid r = 0)$ > sup $Pr(D(n) < 0 \mid r > 0)$.

Keywords: normal distribution, central limit theorem, disadvantageous change, trinary choice, rate of discount